UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI SCIENZE ECONOMICHE ED AZIENDALI "M.FANNO"

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "Tullio-Levi-Civita"

CORSO DI LAUREA IN ECONOMIA

PROVA FINALE

"CONTROLLO OTTIMO DI PRODUZIONE E QUALITA'"

RELATORE:

CH.MO PROF. BRUNO VISCOLANI

LAUREANDO: BEGGIATO GUIDO

MATRICOLA N. 1112977

ANNO ACCADEMICO 2017 – 2018

Controllo ottimo di produzione e qualità

LAUREANDO: GUIDO BEGGIATO*

Università degli Studi di Padova
Scuola di Economia e Scienze Politiche
Dipartimento di Scienze Economiche e Aziendali M. Fanno
Dipartimento di Matematica T. Levi-Civita

luglio 2018

Sommario

Nell'analisi di un problema economico é frequente la situazione nella quale sia necessario comprendere, controllare e modificare il comportamento di dimensioni e grandezze che variano nel tempo. In quest'ambito il processo decisionale puó essere visto come un problema di controllo ottimo poiché le possibili scelte strategiche influiscono sull'evoluzione di un sistema dinamico, definito come un sistema nel quale le leggi che ne governano il comportamento sono rappresentate da equazioni differenziali. In questo elaborato si analizza un particolare problema di controllo ottimo, che si distingue per la presenza di un parametro; il problema viene poi paragonato al controllo ottimo di una funzione di produzione, con il parametro a rappresentare il livello di qualitá del prodotto. Tale problema viene risolto seguendo due approcci, quello di Pontryagin e quello, meno noto, elementare. Vengono infine citati studi e pubblicazioni che supportano l'applicabilitá economica di questo modello teorico.

I. INTRODUZIONE

La qualitá é un aspetto molto importante in termini di Operations Management in quanto é uno dei parametri sui quali i consumatori si focalizzano per giudicare una impresa ed é per questo da tempo oggetto di ricerca [14]. In questo elaborato si presenta l'ottimizzazione dinamica di un problema di produzione tramite l'impiego dello strumento matematico del controllo ottimo in quanto le caratteristiche di dinamicitá nel tempo e la stretta correlazione con il prezzo di un prodotto rendono la qualitá il candidato ideale per la sua rappresentazione tramite questo strumento. Il modello si basa sul prototipo proposto da M. I. Kamien e N. L. Schwartz nel 1981 [8] nel quale la qualitá si presenta come una ulteriore variabile decisionale che influenza il prezzo (assieme alla quantitá) e il costo (assieme al tasso di produzione) del prodotto.

L'elaborato procede come segue: nella sezione II viene proposto un problema di controllo ottimo con parametri e vengono descritte e dimostrate le condizioni necessarie di ottimalitá. Nella sezione III viene introdotto il problema di produzione, che viene discusso sulla base delle condizioni di ottimalitá appena esposte e viene poi risolto secondo due metodi diversi: quello di Pontryagin e quello elementare. Nella sezione IV si presentano brevemente delle pubblicazioni che adottano o riportano assunzioni simili a quelle fatte nel modello. Nella sezione V si conclude con riferimenenti per ulteriori ambiti di ricerca.

*Relatore: Prof. Bruno Viscolani

II. Il modello matematico

Sia dato il problema di controllo ottimo nella forma di Bolza e relativo ad un intervallo di tempo $[t_0, t_1]$ fissato:

$$
\begin{aligned}
\text{massimizza} \quad & J(u,w) = \int_{t_0}^{t_1} e^{-\rho t} f^0(x(t),u(t),w,t)dt + e^{-\rho t_1} S(x(t_1),w) \\
\text{soggetto a} \quad & \dot{x}(t) = f(x(t),u(t),w,t) \\
& x(t_0) = x^0 \\
& x_i(t_1) = x_i^1 \qquad\qquad i = 1,...,l, \\
& x_i(t_1) \geq x_i^1 \qquad\qquad i = l+1,...,m, \\
& x_i(t_1) \in \mathbb{R} \qquad\qquad i = m+1,...,n, \\
& u(t) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^r \\
& w \in W \subseteq \mathbb{R}^s
\end{aligned}
$$

dove w é un parametro. La funzione integranda nel funzionale obiettivo é il prodotto del "fattore di attualizzazione" $e^{-\rho t}$ dove $\rho > 0$ e della funzione $f^0(x(t),u(t),w,t)$:

$$e^{-\rho t} f^0(x(t),u(t),w,t)$$

Per le funzioni implicate nella definizione del problema supponiamo che $f^0(x,u,w,t)$ e $f_i(x,u,w,t)$, $i = 1,...,n$, siano continue in (x,u,w,t) e dotate di derivate parziali prime continue in x e w, mentre $S(x,w)$ sia una funzione di classe C^1.
Per formulare le condizioni necessarie per l'ottimalitá si introducono la variabile aggiunta $q \in \mathbb{R}^n$ e il parametro reale p_0 e si definisce la funzione hamiltoniana "a valore corrente":

$$H^c(x,u,w,q,t) = p_0 f^0(x,u,w,t) + \sum_{i=1}^{n} q_i f_i(x,u,w,t)$$

dove chiamiamo le variabili aggiunte "a valore corrente" le q_i.
La funzione hamiltoniana assume valori reali e ha per dominio l'insieme $\mathbb{R}^n \times \Omega \times W \times \mathbb{R}^n \times [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}^{2n+r+s+1}$.

$$H : \mathbb{R}^n \times \Omega \times W \times \mathbb{R}^n \times [t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

Essa é una combinazione lineare delle funzioni $f^0(x,u,w,t)$ che entra nella definizione di funzionale obiettivo e $f_i(x,u,w,t), i = 1,...,n$, che entrano nella definizione di equazioni del moto. Le proprietá di tali funzioni sono quindi ereditate dalla funzione hamiltoniana; essa risulta inoltre essere una funzione lineare affine (un polinomio di 1^o grado) nelle variabili aggiunte q. Pertanto $H^c(x,u,w,q,t)$ é anche continua e dotata di derivate parziali prime continue in q.

Corollario 1. *Per il problema di controllo nella forma di Bolza con attualizzazione, sia $(u^*(t), x^*(t), w^*)$ una soluzione ottima, con $u^*(t)$ un controllo continuo a tratti, definito su tutto $[t_0, t_1]$ e w^* una costante, a cui sia associata la funzione di stato $x^*(t)$ attraverso l'equazione del moto e la condizione iniziale $x(t_0 = x^0)$.*
Allora esistono $n+1$ costanti $p_0, \eta_1, \eta_2, ..., \eta_n \in \mathbb{R}$ e una funzione continua e di classe C^1 a tratti

$q(t)(q : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n)$ *tali che, per ogni* $t \in [t_0, t_1]$ *valgano le seguenti condizioni:*

$i)$ $\quad (p_0, \eta) \neq 0 \in \mathbb{R}^{n+1}, \qquad (\eta = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n));$

$ii)$ $\quad u^*(t)$ *massimizza* $H^c(x^*(t), u, w^*, q(t), t)$ *per* $u \in \Omega$;

$iii)$ $\quad$ *tranne che per i tempi t in cui* $u^*(t)$ *é discontinua, q(t) é differenziabile e*

$$\dot{q}(t) = -\frac{\partial H^c(x^*(t), u^*(t), w^*, q(t), t)}{\partial x} + \rho q(t);$$

$iv)$ $\quad p_0 \in \{0, 1\};$

$v)$ $\quad q_i(t_1) = p_0 \frac{\partial S(x^*(t_1), w^*)}{\partial x_i} + \eta_i, \quad i = 1, ..., n$

$\eta_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, ..., l;$

$\eta_i \geq 0$ *e* $\eta : i(x_i^*(t_1) - x_i^1) = 0 \quad i = l+1, ..., m;$

$\eta_i = 0 \quad i = m+1, ..., n;$

$vi)$ $\quad$ *per ogni* $w \in W$

$$\left(\int_{t_0}^{t_1} e^{-\rho t} \frac{\partial H^c(x^*(t), u^*(t), w^*, q(t), t)}{\partial w} dt + e^{-\rho t_1} \frac{\partial S(x^*(t_1), w^*)}{\partial w} \right) (w - w^*) \leq 0.$$

Dimostrazione*.* La funzione hamiltoniana ordinaria é:

$$H(x, u, w, p, t) = p_0 e^{-\rho t} f^0(x, u, w, t) + \sum_{i=1}^{n} p_i f_i(x, u, w, t)$$

dove p_i sono le variabili aggiunte ordinarie.
Per il **(teorema 1)** in [15] abbiamo che se $(u^*(t), w^*)$ é una coppia controllo-parametro ottima, con $u^*(t)$ continuo a tratti, a cui sia associata la funzione di stato $x^*(t)$, allora esistono delle costanti $p_0, \gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n \in \mathbb{R}$ ed una funzione continua e di classe C^1 a tratti $p(t)(p : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n)$ tali che, per ogni $t \in [t_0, t_1]$, valgano le seguenti condizioni:

$i)$ $\quad (p_0, \gamma) \neq 0 \in \mathbb{R}^{n+1}, \qquad (\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n));$

$ii)$ $\quad u^*(t)$ massimizza $H(x^*(t), u, w^*, p(t), t)$ per $u \in \Omega$;

$iii)$ $\quad$ tranne che per i punti per cui $u^*(t)$ é discontinua, $p(t)$ é differenziabile e

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H(x^*(t), u^*(t), w^*, p(t), t)}{\partial x};$$

$iv)$ $\quad p_0 \in \{0, 1\};$

$v)$ $\quad p_i(t_1) = p_0 e^{-\rho t_1} \frac{\partial S(x^*(t_1), w^*)}{\partial x_i} + \gamma_i \qquad i = 1, ..., n$

$\gamma_i \in \mathbb{R} \qquad i = 1, ..., l;$

$\gamma_i \geq 0 e \gamma_i(x^*(t_1) - x_i^1) = 0 \qquad i = l+1, ..., m;$

$\gamma_i = 0 \qquad i = m+1, ..., n;$

$vi)$ $\quad$ per ogni $w \in W$

$$\left(\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H(x^*(t), u^*(t), w^*, p(t), t)}{\partial w} dt + e^{-\rho t_1} \frac{\partial S(x^*(t_1), w^*)}{\partial w} \right) (w - w^*) \leq 0.$$

□

Nel caso particolare che $S(x(t_1)) \equiv 0$, cioé se il funzionale obiettivo é nella forma di Lagrange, un enunciato equivalente del **corollario 1** é il seguente:

Corollario 2. *Sia $S(x, w) \equiv 0$ nella definizione del problema e sia $(u^*(t), x^*(t), w^*)$ una soluzione ottima, con $u^*(t)$ un controllo ottimo continuo a tratti, definito su $[t_0, t_1]$, a cui sia associata la funzione di stato $x^*(t)$.*
Allora esistono una costante $p_0 \in \mathbb{R}$ e una funzione continua e di classe C^1 a tratti $q(t)(q : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n)$ tali che, per ogni $t \in [t_0, t_1]$, valgano le seguenti condizioni:

i) $(p_0, q(t)) \neq 0 \in \mathbb{R}^{n+1}$;

ii) $u^*(t)$ *massimizza* $H^c(x^*(t), u, w^*, q(t), t)$ *per* $u \in \Omega$;

iii) *tranne che per i punti per cui $u^*(t)$ é discontinua, $q(t)$ é differenziabile e*
$$\dot{q}(t) = -\frac{\partial H(x^*(t), u^*(t), w^*, q(t), t)}{\partial x} + \rho q(t);$$

iv) $p_0\{0, 1\}$;

v) $q(t_1) \in \mathbb{R} \quad i = 1, ..., l;$
$q(t_1) \geq 0$ *e* $q(t_1)(x^*(t_1) - x_i^1) = 0 \quad i = l+1, ..., m;$
$q(t_1) = 0 \quad i = m+1, ..., n;$

vi) *per ogni* $w \in W$
$$\left(e^{-\rho t}\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H(x^*(t), u^*(t), w^*, p(t), t)}{\partial w} dt\right)(w - w^*) \leq 0.$$

III. Il problema di produzione

Si consideri il problema di programmazione della produzione e della scelta della qualitá q di un prodotto:

$$\begin{aligned}
\text{massimizza} \quad & J = \int_0^T -c_P(q)u^2(t)dt + (a(q) - bx(T))x(T) \qquad (1)\\
\text{soggetto a} \quad & \dot{x}(t) = u(t)\\
& x(0) = 0\\
& u(t) \in [0, +\infty)\\
& q \in [0, 1]
\end{aligned}$$

L'intervallo di programmazione é $[0, T]$ con un tempo finale fissato a $T > 0$. L'intensitá di produzione $u(t) \geq 0$ é la funzione di controllo, mentre il livello del magazzino $x(t)$ é la funzione di stato. Il prodotto ha una qualitá $q \in [0, 1]$, scelta dall'impresa e costante durante tutto l'intervallo di programmazione.
L'equazione del moto rappresenta l'identitá tra lo sforzo di produzione $u(t)$ e il tasso, o identitá, di produzione $\dot{x}(t)$. Il tasso di costo per una data intensitá di produzione u e una data qualitá q é dato da $c_P(q)u^2$, dove il parametro $c_P(q)$ é una funzione monotona crescente di classe C^1, con $c_P(0) = k_0 > 0$, come ipotizzato da [4]
Una quantitá x di prodotto puó essere venduta al tempo finale T al prezzo di equilibrio di mercato pari a $a(q) - bx$, dove $-bx$ é il tipico termine variabile in una funzione di domanda inversa, con $b > 0$, [5, pg 138, 251, 268]; $a(q)$ é invece il prezzo di riserva del prodotto per il dato livello di

qualitá q: a é una funzione di classe C^1, crescente e con $a(0) = 1$.
Quindi la funzione integrale nel funzionale obiettivo é l'opposto del costo totale di produzione, associato alla soluzione ammissibile $(u(t), x(t), q)$, mentre la scrap value function rappresenta il ricavo derivante dal vendere la quantitá $x(T)$ sul mercato all'istante finale T.
Questo modello differisce da quello di Kamien e Schwartz in quanto é stato aggiunto il parametro che rappresenta la qualitá e é stato considerato il caso della domanda variabile, mentre gli autori prevedevano una domanda fissa e la presenza del costo di magazzino [8].

Condizioni di ottimalitá

Una soluzione ammissibile é una tripletta $(u(t), x(t), q)$ tale che $q \in [0, 1]$, $u(t)$ sia una funzione non-negativa, derivabile con continuitá a tratti, $x(t)$ sia una funzione continua e derivabile con continuitá a tratti che soddisfi l'equazione del moto con l'uso del controllo $u(t)$ e del valore q per la qualitá e della condizione iniziale.
Una tripletta ammissibile $(u^*(t), x^*(t), q^*)$ é una soluzione ottima se e solo se il valore del funzionale obiettivo in quel punto é maggiore o uguale del valore assunto dal funzionale obiettivo in tutte le altre triplette ammissibili.
Ci sono due modi di affrontare il problema di controllo ottimo:

- il metodo di Pontryagin, che considera le condizioni necessarie per una soluzione ottima del problema di controllo con il parametro q (una variante del principio del massimo di Pontryagin [12] e [11]) e poi cerca una soluzione.

- il metodo elementare, che considera q come un parametro esogeno, ricava il valore ottimale del funzionale obiettivo in funzione del parametro q e infine ne discute i punti di massimo.

III.1 Approccio di Pontryagin

La funzione Hamiltoniana, ponendo $p_0 = 1$ é

$$H(x, u, q, \lambda) = -c_P(q)u^2 + \lambda u \tag{2}$$

dove λ é la variabile aggiunta. Se $(u^*(t), x^*(t), q^*)$ é una soluzione ottima per il problema (1), con una q costante e $u^*(t)$ un controllo continuo a tratti definito sull'intervallo $[0, T]$, allora esiste una funzione λ continua e differenziabile con continuitá a tratti tale che[1]:

$ii)$ $\quad u^*(t) = \arg\max_{u \geq 0} \{-c_P(q^*)u^2 + \lambda(t)u\}$;

$iii)$ $\quad$ tranne che nei punti in cui $u^*(t)$ é discontinua $\dot{\lambda}(t) = 0$;

$v)$ $\quad \lambda(T) = a(q^*) - 2bx^*(T)$;

$vi)$ $\quad$ per ogni $q \in [0, 1]$, $\left(\int_0^T \frac{\partial H(x^*(t), u^*(t), q^*, \lambda(t))}{\partial q} dt + a'(q^*)x^*(T) \right)(q - q^*) \leq 0.$

Dalla condizione (ii) otteniamo che

$$u^*(t) \;=\; \begin{cases} 0 & \lambda(t) \leq 0 \\ \frac{\lambda(t)}{2c_P(q^*)} & \lambda(t) > 0 \end{cases} \tag{3}$$

[1] le condizioni (i) e (iv) sono omesse in quanto si pone $p_0 = 1$ e sono quindi automaticamente soddisfatte.

Le condizioni (iii) e (iv), assieme alla continuitá della funzione aggiunta danno:

$$\lambda(t) = a(q^*) - 2bx^*(T) \tag{4}$$

Osserviamo che:

$$\frac{\partial H}{\partial q} = -c_P'(q)u^2$$

in questo modo la condizione (vi) si legge come: per ogni $q \in [0,1]$,

$$\left(-c_p'(q^*)\int_0^T (u^*)^2(t)dt + a'(q^*)x^*(T)\right)(q-q^*) \leq 0 \tag{5}$$

Remark 1. *Si noti che le condizioni di ottimalitá che sono necessarie, sono anche sufficienti [12] se la scrap value function* $S(x,q) = (a(q) - bx)x$ *é concava in* $(x,q) \in [0,+\infty) \times [0,1]$.

Soluzione ottima

Da (3) e (4) un controllo ottimo deve essere costante

$$u^*(t) = u^* = \frac{1}{2c_P(q^*)}\max\{0, a(q^*) - 2bx^*(T)\}.$$

Se $u^* = 0$ allora $x^*(t) = 0$ e in particolare $x^*(T) = 0$ e cosí

$$u^* = \frac{a(q^*)}{2c_P(q^*)} > 0$$

é una contraddizione. Allora dobbiamo avere $u^* > 0$ e usando tale controllo nell'equazione del moto otteniamo la funzione di stato

$$x^*(t) = \frac{a(q^*) - 2bx^*(T)}{2c_P(q^*)}t$$

Ponendo $t = T$ otteniamo un'equazione lineare in $x^*(T)$; la sua soluzione unica ci permette di ottenere l'unico candidato a controllo ottimo

$$u^* = \frac{a(q^*)}{2(c_P(q^*) + bT)} > 0$$

e lo stato associato

$$x^*(t) = \frac{a(q^*)}{2(c_P(q^*) + bT)}t$$

Infine la condizione (vi) (o l'equazione 5) é equivalente a

$$\left(-\frac{c_P'(q^*)}{2(c_P(q^*) + bT)}a(q^*) + a'(q^*)\right)(q - q^*) \leq 0, \quad \text{per ogni } q \in [0,1]$$

In particolare abbiamo che

$$q^* \in (0,1) \Rightarrow \frac{a'(q^*)}{a(q^*)} = \frac{c_P'(q^*)}{2(c_P(q^*) + bT)} \tag{6}$$

III.2 Approccio elementare

Se si considera q come un parametro esogeno, il valore massimo del funzionale obiettivo, condizionato alla scelta di q, é

$$J(q) = u^* T\{a(q) - c_P(q)u^* - bu^* T\} = \frac{a^2(q)T}{4(c_P(q) + bT)}$$

e vogliamo massimizzarlo rispetto al parametro q, che ora trattiamo come una variabile decisionale. Osserviamo che $J(q)$ é una funzione differenziabile con continuitá e

$$J'(q) \geq 0 \Longleftrightarrow \frac{a'(q)}{a(q)} \geq \frac{c'_P(q)}{2(c_P(q) + bT)}$$

in particolare riusciamo a riconoscere il risultato per la soluzione ottima interna di (6).

III.3 Produrre una quantitá fissata

Tornando al problema proposto da [8] cosideriamo l'assunzione che "l'impresa abbia ricevuto un ordine per B unitá di prodotto da consegnare al tempo T". Il problema di controllo ottimo che ne deriva é

$$\begin{aligned} \text{massimizza} \quad & J = \int_0^T -c_P(q)u^2(t)dt + Ba(q) \\ \text{soggetto a} \quad & \dot{x}(t) = u(t) \\ & x(0) = 0 \\ & x(T) = B \\ & u(t) \in [0, +\infty) \\ & q \in [0, 1] \end{aligned} \tag{7}$$

dove $B > 0$ é la quantitá ordinata, $Ba(q)$ é usato come scrap value function al posto di $B(a(q) - bB)$, che é l'ovvia scelta dal problema (1).

Soluzione ottima

La funzione hamiltoniana é di nuovo data dalla formula (2) e se $(u^*(t), x^*(t), q^*)$ é una soluzione ottima per il problema (7), allora devono essere soddisfatte le condizioni nel paragrafo "approccio di Pontryagin", con i due seguenti cambi:

v) $\lambda(T) \in \mathbb{R}$;

vi) per ogni $q \in [0, 1]$

$$\left(-c'_P(q^*) \int_0^T (u^*)^2(t)dt + Ba'(q^*)\right)(q - q^*) \leq 0$$

Otteniamo che la funzione aggiunta e quella di controllo sono costanti positive

$$\lambda(t) = \lambda(T) > 0$$

e

$$u^*(t) = u^* = \frac{\lambda(T)}{2c_P(q^*)}$$

Allora la funzione di stato é lineare e per essere ammissibile é

$$x^*(t) = \frac{B}{T}t$$

cosí che

$$u^* = \frac{B}{T}$$

si noti che sia u^* che $x^*(t)$ sono invarianti rispetto a q. Infine la condizione (vi) é equivalente a

$$\left(-\frac{B}{T}c'_P(q^*) + a'(q)\right)(q - q^*) \leq 0, \quad q \in [0,1]$$

In particolare abbiamo che

$$q^* \in (0,1) \Rightarrow a'(q^*) = \frac{B}{T}c'_P(q^*)$$

cioé che la qualitá influenza i profitti ma non il tasso di produzione.

Remark 2. *Possiamo osservare che le condizioni di ottimalitá sono sufficienti [12] se il prezzo di riserva $a(q)$ e il reciproco della funzione di costo di produzione $\frac{1}{c_P(q)}$ sono concave.*

IV. Collegamenti

Nell modello appena analizzato la qualitá viene scelta all'inizio dell'intervallo di programmazione, e viene mantenuta costante: questa scelta é condivisibile per intervalli di programmazione di breve periodo, ma per tempistiche superiori, eventualmente tendenti a infinito, spesso in letteratura si adotta l'assunzione che la qualitá possa essere adattata istantaneamente e in maniera permanente ad un qualche costo, come ricordato da [1], che adottano un approccio dinamico e interpretano la qualitá come uno stock che puó quindi essere aumentata solo se l'investimento in essa é piú alto del suo tasso di deterioramento. Gli stessi autori affermano, riguardo il proprio modello, che quando l'investimento in qualitá é costoso il costo marginale é crescente, come rappresentato dall'equazione qui riportata:

$$C(I_i, x_i^D, q_i) = \frac{c}{2}(x_i^D)^2 + \frac{\gamma}{2}I_i^2 + \frac{\beta}{2}q_i^2 + \varphi q_i I_i$$

dove q_i indica la qualitá del prodotto o servizio e $\beta > 0$; si noti come il costo marginale sia quadratico sia in investimento I che in qualitá q e come la derivata prima della funzione di costo rispetto alla qualitá sia strettamente positiva $\frac{\partial C}{\partial q} > 0$.
Tale ultima assunzione é sostenuta anche dagli stessi autori, che in [2] definiscono la propria funzione di costo tramite le seguenti assunzioni:

$$\frac{\partial C}{\partial q} > 0 \qquad\qquad \frac{\partial^2 C}{\partial q^2} > 0$$

ossia: la derivata prima e la derivata seconda della funzione di costo rispetto alla variabile qualitá sono strettamente positive, indicando rispettivamente come un aumento del livello di qualitá comporti un aumento dei costi e che la funzione di costo é convessa rispetto alla qualitá; un esempio di tale funzione potrebbe essere $C = f(q) = a^q$, con $a > 1$.
Interessante é anche la definizione di qualitá che [6] danno: *"ogni aspetto di un prodotto, compresi i*

servizi inclusi nel contratto di vendita, che influenza la curva di domanda"; questo concetto si lega a quello esposto da [3], che ipotizza una funzione di domanda

$$f = a_0 - a_1 p + a_2 q, \quad \text{con } a_0, a_1, a_2 > 0$$

e per il quale la qualitá e il costo sono legati in maniera differente: all'aumentare della qualitá o del costo di produzione corrisponde un aumento del prezzo praticato dall'impresa, mentre la qualitá puó essere modificata agendo sulla funzione di innovazione di prodotto.
Un prodotto il cui costo aumenti con il livello di qualitá ($\frac{\partial C}{\partial q} > 0$) rispecchia il settore dell'hardware piuttosto che quello del software ($\frac{\partial C}{\partial q} = 0$), come ricordato da [4].

Secondo [9] i costi relativi alla qualitá possono essere divisi in quattro categorie: (1) le spese di prevenzione, come la manutenzione dell'equipaggiamento e gli studi di progettazione del prodotto, finalizzate a evitare la produzione di pezzi difettosi; (2) le spese di valutazione, necessarie per mantenere il livello di qualitá durante i controlli, la fase di test e di audit; (3) i costi interni di fallimento interno, come il costo di rottamazione o di rilavorazione, che emergono dall'individuazione interna di problemi relativi alla qualitá; e (4) i costi esterni di fallimento, come il costo di rimpiazzo. Questi ultimi due vengono chiamati costi di non conformitá e rispecchiano i costi derivanti dal non raggiungere lo standard di qualitá prefissato, mentre i primi due vengono chiamati costi di conformitá e riflettono il costo necessario per ottenere un determinato livello di qualitá, e sono piú adatti per identificarsi con il parametro q del problema di controllo ottimo proposto nella sezione precedente. [9] ricordano inoltre che la maturitá tecnologica di un processo produttivo significa minori variazioni di prodotto e di processo nel tempo, sostenendo cosí l'ipotesi di invariabilitá nel tempo fatta relativamente al parametro q.
Ricerche empiriche dimostrano inoltre come i consumatori a seguito di un aumento del prezzo si aspettino un aumento della qualitá del prodotto ([10], [7]).

V. Conclusione

In questo elaborato é stato descritto un problema di controllo ottimo con fattore di attualizzazione e un parametro w. Sono state successivamente esposte le condizioni di ottimalitá necessarie (e sufficienti) affinché si possa determinare la soluzione ottima di tale problema e le condizioni sono state dimostrate. É stato poi proposto un altro problema di controllo ottimo, con le stesse caratteristiche del problema teorico, ma applicato alla realtá aziendale, in particolare rivolto all'ottimizzazione della produzione per massimizzare il profitto; tale problema é stato risolto secondo l'approccio di Pontryagin e secondo quello elementare. Infine, sono stati presentati collegamenti con altre pubblicazioni che adottano assunzioni teoriche analoghe a quelle fatte dal modello, per supportarne l'eventuale applicazione pratica e l'aderenza alla realtá.

Un ambito di indagine che esula dagli scopi di questo modello, ma che é strettamente legato ad esso, é come il livello di qualitá influenzi le *vendite* di una impresa, oltre che la sua funzione di costo: [13] propongono diversi scenari di mercato (uno o due beni con alto livello di qualitá e uno o due con basso livello, per un totale di quattro scenari possibili; quello piú generale é rappresentato dalla configurazione che vede due beni in entrambe le fasce di qualitá) e concludono dicendo che, in ambito di offerte promozionali:

- le riduzioni di prezzo per beni di alta qualitá sono considerate riduzioni delle perdite;
- le riduzioni di prezzo per beni di bassa qualitá sono considerate aumenti dei guadagni.

Gli autori ricordano peró che tali risultati vanno ricondotti a un contesto di competizione tra *brands* e strategie dei *retailers*, quindi le strategie di prezzo dipendono sia dalle strategie di questi ultimi che dal marketing dei primi.

Sarebbe interessante riuscire a costruire un modello matematico che riuscisse a coniugare la scelta dinamica del livello di qualitá in funzione della strategia di prezzo e dell'efficacia del marketing, magari includendo anche la presenza di un competitor: il primo passo sarebbe probabilmente una ricerca empirica atta ad individuare quali sono le piú realistiche assunzioni matematiche riguardo la funzione che descrive l'efficacia del marketing in relazione alle vendite.

Riferimenti bibliografici

[1] K. R. Brekke, R. Cellini, L. Siciliani, and O. R. Straume. Competition and quality in health care markets: A differential-game approach. *Journal of Health Economics*, 29:508–523, 2010.

[2] K. R. Brekke, L. Siciliani, and O. R. Straume. Quality competition with profit costraints. *Journal of Economic Behaviour & Organization*, 84:642–659, 2012.

[3] R. Chenavaz. Dynamic pricing, product and process innovation. *European Journal of Operational Research*, 222(3):553–557, 2012.

[4] R. Chenavaz and S. M. Jasimuddin. An analytical model of the relationship between product quality and advertising. *European Journal of Operational Research*, 263(1):295–307, 2017.

[5] E. Dockner, S. Jorgensen, N. V. Long, and G. Sorger. *Differential Games in Economics and Management Science*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.

[6] R. Dorfman and P. O. Steiner. Optimal advertising and optimal quality. *American Economic Review*, XLIV:826–836, 1954.

[7] J. P. Guiltinan. Managing quality cues for product-line pricing. *Journal of Product and Brand Management*, 9(3):150–163, oct 2000.

[8] M. I. Kamien and N. L. Schwartz. *Dynamic Optimization: the calculus of variations and optimal control in economics and management*. North-Holland, New York, NY, second edition, 1991.

[9] V. Nagar and M. V. Rajan. The revenue implications of financial and operational measures of product quality. *The Accounting Review*, 76(4):495–513, oct 2001.

[10] R. Olbrich and H. C. Jansen. Price-quality relationship in pricing strategies for private labels. *Journal of Product & Brand Management*, 23(6):429–438, oct 2014.

[11] L. Pontriaguine, V. Boltianski, R. Gamkrélidzé, and E. F. Michtchenko. *Théorie Mathématique des Processus Optimaux*. éditions MIR, Moscou, 1974.

[12] A. Seierstad and K. Sydsaeter. *Optimal Control Theory with Economic Applications*. North-Holland, Amsterdam, 1987.

[13] K. Sivakumar. Optimal pricing in tiered markets. *Journal of Product and Brand Management*, 22(3):249–259, oct 2013.

[14] N. Slack, S. Chambers, and R. Johnston. *Operations Management*. Pearson education, Financial Times Prentice Hall, Harlow, third edition, 2001.

[15] B. Viscolani. Problemi di controllo con parametri. Comunicazione personale.